

Investitionsentscheidungen mit Zustandsnetzen

GUIDO RECKE, GÖTTINGEN
MICHAEL LESERER, GÖTTINGEN

Abstract

Normally investment problems under uncertainty would be analysed by decision trees. But if there are exogenous factors other than cash flow so that the problem to be solved is a simultaneous multifactor investment problem, the analysis should be based on decision networks, which offers a special form of analysis of variance.

1 Problemstellung

Investitionsentscheidungen werden grundsätzlich in der Weise getroffen, daß man eine Anfangsauszahlung mit den künftigen Rückflüssen vergleicht. In vielen Fällen kann es darüber hinaus notwendig werden, neben der wahrscheinlichkeitsbewährten, weil unsicheren, Rückflußfolge weitere, insbesondere exogene Einflüsse im Investitionskalkül zu berücksichtigen. Damit kommen, falls diese ebenfalls stochastisch sind, zum Rückflußrisiko weitere Risiken hinzu. Wird der sonst üblicherweise zur Analyse verwendete Zustandsbaum um diese "parallel" laufenden Risiken erweitert, entsteht ein wegen seiner graphischen Gestalt so benanntes Entscheidungs- oder Zustandsnetz. Solche sind kausalverbundene Möglichkeitsbündel, bei denen auch Mehrfachverknüpfung und mehrere Ursprünge zulässig sind. Das heißt: Mehrere Kanten können einen Knoten nicht nur verlassen, sondern auch auf ihn zuführen. Die probabilistische Analyse solcher Zustandsnetze, die beide Risikoarten enthalten, verglichen mit der für Zustandsbäume, die nur das Rückflußrisiko darstellen, für den Fall, daß sie jeweils Investitionspläne beschreiben, ist Gegenstand dieser Arbeit.

2 Beispiel

Grundlage für die nachstehende Analyse ist folgendes Beispiel. Ein Investitionsplan bestehe aus zwei Stufen. Die erste Stufe enthalte den auf den Anfangszeitpunkt abgezinsten Rückfluß am Ende der ersten Periode. Der Einfachheit halber seien nur zwei Rückflußrealisationen möglich (vgl. Anhang: Abbildung 1): Einer aus einer "guten" Geschäftsentwicklung (Zustand A_1) und einer aus einer "schlechten" Geschäftsentwicklung (Zustand A_2) resultierend. Eine zweite Stufe enthalte die diskontierten Rückflüsse mehrerer Folgeperioden, wieder als Ergebnis einer "guten" (Zustand C_1) und einer "schlechten" Geschäftsentwicklung (Zustand C_2) und jeweils in Abhängigkeit von den Zuständen A_1 und A_2 . Das Risiko der so definierten Rückflußfolge ist durch die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände – ebenfalls in Abbildung 1 aufgeführt – gegeben. Das Bild dieser Rückflußfolge ist der übliche Zustandsbaum mit drei Verzweigungen.

Nimmt man nun an, die schlechte Geschäftsentwicklung in der ersten Periode A_2 belaste, falls sie eintritt, die Liquidität der Unternehmung derart, daß eine Fortführung des Investitionsvorhabens nur dann gesichert ist, wenn die Hausbank einen Kredit gewährt. Die Kreditvergabe kann erfolgen (Zustand B_1) oder nicht (Zustand B_2). Welche der beiden Möglichkeiten eintritt, ist extern determiniert und mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten unsicher. Damit kommt zum Risiko aus unsicheren Rückflüssen noch ein Kreditvergaberisiko, das im Investitionsplan redlicherweise berücksichtigt werden sollte. Die Verknüpfung des (B_1, B_2) -Bündels mit dem Zustandsbaum der Rückflüsse gemäß der Semantik exogener Einflüsse liefert das Zustandsnetz der im Anhang aufgeführten Abbildung 2.

3 Varianzanalyse

Die Analyse der jeweils durch Baum und Netz definierten stochastischen Situation basiert auf der Einsicht, daß beiden, also sowohl dem Zustandsbaum aus Abbildung 1 als auch dem Zustandsnetz aus Abbildung 2, eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion (WMF) der für sie konstruierten Zufallsvariablen zugeordnet werden kann. Ausgewertet werden dann die Charakteristika dieser WMFen. Für Baum und Netz lassen sich Zufallsvariablen auf einfache Weise dadurch definieren, daß man den jeweiligen Zuständen die dort erzielbaren ökonomischen Ergebnisse zuordnet. Den Rückfluß der ersten Stufe bilde im Baum die Zufallsvariable u (im Netz u_1) ab, den der zweiten Stufe die Zufallsvariable v . Die die Kreditvergabe der Bank abbildende Zufallsvariable u_2 sei eine (0,1)-Variable. Grundlage eines varianzanalytischen Vergleichs ist die Zerlegung¹

$$varv = varE(v | u) + Evar(v | u),$$

die durch folgende ANOVA-Tabelle erzeugt werden kann.² Die Streuung *der* mittleren Reaktion $E(v | u)$ (SDMR) und Streuung *um* die mittlere Reaktion (SUMR), jeweils über die Werte von u summiert, addieren sich zur Varianz von v auf³

u	SDMR	SUMR	
$u(\mathbf{w}) = x_1$	$[E(v x_1) - Ev]^2 p(x_1)$	$\sum_s [y_s - E(v x_1)]^2 p(y_s x_1)$	
$u(\mathbf{w}) = x_2$	$[E(v x_2) - Ev]^2 p(x_2)$	$\sum_s [y_s - E(v x_2)]^2 p(y_s x_2)$	
	$varE(v/u)$	$Evar(v/u)$	$varv$

Die Auswertung der Charakteristika der fraglichen WMF's liefert zunächst eine Gegenüberstellung der Kapitalwerte und ihrer Standardabweichungen. Es zeigt sich, was hier am gewählten Beispiel seiner Einfachheit wegen auch unmittelbar nachvollziehbar ist, daß infolge der zusätzlichen Unsicherheit im Netz der Kapitalwert (Netz) niedriger ausfällt als der Kapitalwert (Baum) und auch stärker streut. Entsprechend ist der Wert einer Warteoption (Verschiebung des Investitionszeitpunkts auf den Beginn der zweiten Stufe) im Netz höher als beim Baum.

Bemerkenswert ist darüber hinaus die Auswertung der ANOVA-Tabellen: Neben anderem kann hier festgestellt werden, was die im Anhang aufgeführten Tabellen 1 und 2 zeigen: Der Varianzanteil der auf u_1 zurückzuführenden mittleren Reaktion von v , also $varE(v | u_1)/varv =: \rho_{v|u_1}$, ist im Netz höher als im Baum. Der Unterschied in den (normierten) Anteilen kann mit der unterschiedlichen Möglichkeitsstruktur in den beiden durch Baum und Netz definierten Wahrscheinlichkeitsfeldern begründet werden. Damit zeigt zumindest das hier gewählte Beispiel, daß dieses die Einflußintensität einer Ursachenvariablen charakterisierende Maß – hier in Anlehnung an die datengestützte Regressionsanalyse "Bestimmtheitsmaß" genannt – nicht von der Anzahl der konkurrierenden Einflüsse abhängt, sondern vom Anteil der Möglichkeiten (gemessen an der Gesamtzahl aller Möglichkeiten) bei denen qua Zufallsvariablendefinition der jeweils bedingende Variablenwert auftritt.

¹ Vgl. etwa: Jazwinski, A.H., Stochastic Processes and Filtering Theory. New York 1970, S. 41.

² Leserer, M., Zur Stochastik sequentieller Entscheidungen. Institut für Agrarökonomie der Universität Göttingen, Diskussionsbeitrag 0101, 2001, S. 12.

³ Die nachstehende Tabelle ist diejenige, die dem Zustandsbaum der Abbildung 1 zugeordnet werden kann. Hier ist $s = 1,2$. Die dem Zustandsnetz der Abbildung 2 zuzuordnende ANOVA-Tabelle enthält zusammen oder einzeln die Zufallsvariablen $u_j, j = 1,2$, mit den Werten x_{j1} und x_{j2} . ($s = 1,2,3$)

4 Sensitivitätsanalyse

Die eben formulierten Ergebnisse gelten natürlich in Abhängigkeit von den jeweils in den Abbildungen 1 und 2 gewählten Wahrscheinlichkeiten. Wie sich die stochastischen Situationen von Baum und Netz des Abschnitts 2 ändern, wenn man diese Wahrscheinlichkeiten variiert, zeigt eine Sensitivitätsanalyse. Nimmt man vereinfachend an, die Wahrscheinlichkeit für ein gutes Ergebnis in der zweiten Stufe in Abhängigkeit vom guten Ergebnis in der ersten Stufe sei Eins minus der Wahrscheinlichkeit für ein gutes Ergebnis in der zweiten Stufe in Abhängigkeit vom schlechten Ergebnis in der ersten Stufe, so sind drei Wahrscheinlichkeiten parametrisierbar: die Wahrscheinlichkeiten für ein gutes Ergebnis in der ersten und zweiten Stufe und die Wahrscheinlichkeit für die Kreditgewährung der Bank.

Damit kann das Verhalten der aus den WMFen zu bildenden Charakteristika studiert werden. Pars pro toto sei hier aber nur auf den bereits in Abschnitt 3 genannten Effekt eingegangen: Wie ein Vergleich der im Anhang dargestellten Abbildungen 3 und 4 zeigt, dominiert $\varphi_{v/u1}$ (Netz) gegenüber $\varphi_{v/u1}$ (Baum) über dem gesamten Wertebereich von p (Wahrscheinlichkeit für ein gutes Ergebnis in der ersten Stufe), was die in Abschnitt 3 angegebene Begründung absichert.

Darüber hinaus ist, wie Abbildung 4 demonstriert, hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit für die Kreditgewährung der Bank (q) für kleine p -Werte der q -abhängige Verlauf von $\varphi_{v/u1}$ hoch nicht-linear, für große p -Werte aber "praktisch" linear. Das heißt: Die Einflußintensität des Rückflusses der ersten Periode nimmt in dem Maße ab, wie die Wahrscheinlichkeit einer Kreditgewährung steigt, aber derart, daß er q -abhängig für niedrige p -Werte rascher fällt als bei hohen p -Werten. Dieser Effekt ist sachlogisch nachvollziehbar in der gewählten Verknüpfungsstruktur des Beispiels begründet.

5 Ergebnis

Berücksichtigt man bei der Analyse von Investitionsproblemen neben der künftigen Rückflußfolge weitere, den Investitionserfolg beeinflussende Phänomene, so tritt an die Stelle einer Zustandsbaum-Analyse eine wohldefinierte Zustandsnetz-Analyse. Die Auswertung der den entsprechenden Graphen zugeordneten gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsmaßfunktionen liefert dann nicht nur die für die Entscheidungsfindung wichtigeren Kenngrößen (Lageparameter), sondern charakterisiert auch im Rahmen einer Varianzanalyse deren Streuungsverhalten.

6 Literatur

JAZWINSKI, A.H. (1970): Stochastic Processes and Filtering Theory. New York.

LESERER, M. (2001): Zur Stochastik sequentieller Entscheidungen. Institut für Agrarökonomie der Universität Göttingen, Diskussionsbeitrag 0101.

7 Anhang

Die Abbildungen und Tabellen, auf die im Text verwiesen wird, werden in der Reihenfolge ihrer Nennung aufgeführt. Den Berechnungen zum Beispiel des Abschnitts 2 liegen folgende Werte zugrunde: Anfangsauszahlung: 10 GE; Periodenrückflüsse: 2 GE (gute Geschäftsentwicklung), 1 GE (schlechte Geschäftsentwicklung); Zinssatz: 10 v.H. Die erste Stufe umfaßt eine Periode, die zweite Stufe 15 Perioden.

Tabelle 1: ANOVA-Tabelle zum Zustandsbaum

ANOVA	varE(v/u)	Evar(v/u)	var(v)
x_1	2,53	2,30	4,83
x_2	1,08	5,35	6,43
Summe	3,61	7,65	11,26
x_1	0,52	0,48	1
x_2	0,17	0,83	1
	0,32	0,68	1

Tabelle 2: ANOVA-Tabelle zum Zustandsnetz (für u_1)

ANOVA	varE(v/u _{1,.})	Evar(v/u _{1,.})	var(v)
x_{11}	8,20	2,30	10,50
x_{12}	3,51	14,78	18,29
Summe	11,71	17,08	28,79
x_1	0,78	0,22	1
x_2	0,19	0,81	1
	0,41	0,59	1

Abbildung 1: Zustandsbaum

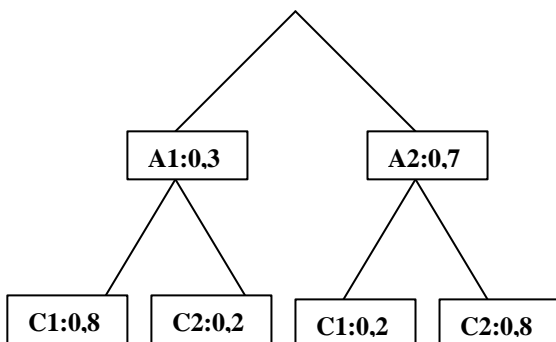


Abbildung 2: Zustandsnetz

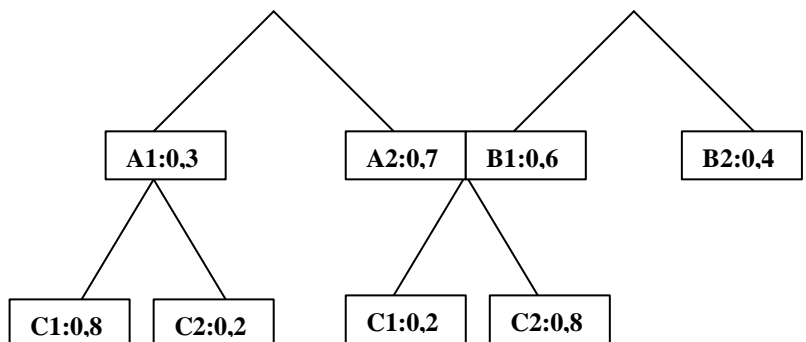


Abbildung 3: Bestimmtheitsmaß abhängig von p

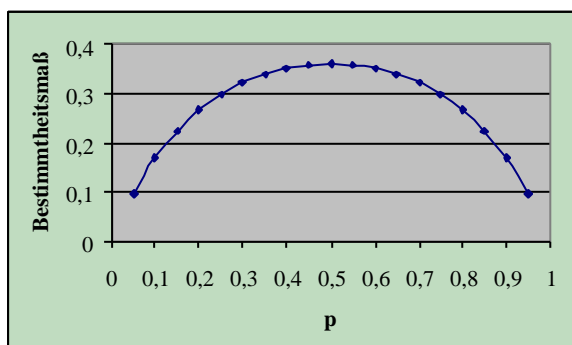


Abbildung 4: Bestimmtheitsmaß abhängig von p und q

