

Analyse Realer Optionen mittels Genetischer Algorithmen

ALFONS BALMANN, BERLIN

OLIVER MUBHOFF, BERLIN

Abstract

In this paper option pricing theory is applied to an investment problem in hog production. Genetic algorithms are used to determine the investment trigger for a pig fattening barn. It turns out that the investment trigger, taking into account the value of waiting in an uncertain environment, can be considerably higher compared to classical investment criteria like the net present value. This offers an explanation why farmers are indeed reluctant to invest in hog production. Another finding is the sensitivity of the investment trigger with respect to the model specification that is assumed for the type of the investment decision.

1 Einführung und Problemstellung

Investitionsentscheidungen müssen zumeist unter Unsicherheit über die zukünftige Entwicklung der Preise, Erträge und Kosten getroffen werden. Insbesondere für Investitionen in die Tierproduktion gilt zudem, dass die Entscheidungen weitgehend irreversibel sind. Mit der Investition werden die Kosten von Gebäuden und Stalltechnik zu einem großen Teil versenkt; denn alternative Verwendungsmöglichkeiten erlauben zumeist nur eine eingeschränkte Deckung der Investitionssumme. Im Rahmen der Theorie „Realer Optionen“ wurden in den letzten Dekaden Verfahren zur Analyse irreversibler Entscheidungen unter Unsicherheit entwickelt. Dabei wird die geschlossene Analogie zwischen Finanzoptionen und Sachinvestitionen genutzt. Ein Ergebnis diverser Studien ist, dass die Bewahrung von Flexibilität einen monetär quantifizierbaren Wert hat. Sofern eine Investitionsentscheidung aufschiebbar ist, die Investition irreversibel ist und die Rückflüsse unsicher sind, sollte eine Investition häufig nur durchgeführt werden, wenn der Gegenwartswert der Rückflüsse ein Vielfaches der Investitionskosten beträgt. PIETOLA UND WANG (2000) kommen beispielsweise für Investitionen in die Ferkelerzeugung und Schweinemast in Finnland auf einen Faktor von über 2, d. h. die erwarteten Rückflüsse müssen die Investitionskosten zu mehr als 200% übertreffen, ehe eine Investition erfolgen sollte. Ein Problem der praktischen Anwendung des Realoptionsansatzes besteht darin, dass sich komplexere Investitionsprobleme nur selten analytisch oder mit konventionellen numerischen Techniken, wie z. B. Binomialbäumen, lösen lassen. Eine Alternative besteht darin, die Bewertung auf stochastische Simulationen aufzubauen und die Lösungsfindung mittels Genetischer Algorithmen durchzuführen.

Nach einer kurzen Darstellung des Konzeptes realer Optionen (Abschnitt 2) werden in Abschnitt 3 Genetische Algorithmen und ihre technische Realisation erläutert. Abschließend werden einige ausgewählte Ergebnisse vorgestellt und diskutiert.

2 Das Konzept realer Optionen¹

Bisher werden zur Rentabilitätsanalyse von Investitionsvorhaben quantitative Verfahren der traditionellen Investitionstheorie genutzt. Das gebräuchlichste ist die klassische Kapitalwertmethode. Dabei entspricht die Summe der Gegenwartswerte aller der Investition folgenden Ein- und Auszahlungen abzüglich den Investitionskosten dem Kapitalwert. Eine Investition sollte dann realisiert werden, wenn der Kapitalwert positiv ist. Bei der Anwendung der Kapitalwertmethode bleibt allerdings unberücksichtigt, dass praktische Investitionsentscheidungen in einer durch Unsicherheit gekennzeichneten Welt zu treffen sind - weswegen Rentabilitäts-

¹ Für eine detaillierte Darstellung vgl. z. B. DIXIT UND PINDYCK (1994).

rechnungen häufig durch Risikoüberlegungen ergänzt werden - und Unternehmen die Durchführung aufschieben können.

Die neue Investitionstheorie liefert einen Ansatz, in dem eine Untersuchung der kombinierten Wirkung von Unsicherheit, Irreversibilität und Flexibilität gelingen kann. Dabei wird die Analogie zwischen realen Investitionsentscheidungen und Finanzoptionen gesucht. Allgemein verbrieft eine Option das Recht - aber nicht die Verpflichtung -, in der Zukunft eine Handlung durchzuführen. Der Inhaber einer Finanzoption hat beispielsweise das Recht, ein Basisobjekt (z. B. eine Aktie) zu einem vorab festgelegten Basispreis innerhalb (amerikanische Optionen) oder nach Ablauf (europäische Optionen) eines bestimmten Zeitraumes (Laufzeit) zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put). Er wird von seinem Wahlrecht aber nur dann Gebrauch machen, wenn dies im Lichte des sich im Zeitverlauf verändernden Preises für das Basisobjekt vorteilhaft ist. Eine Investitionsmöglichkeit stellt ähnlich einer Call Option das Wahlrecht dar, gegen Entrichtung der Investitionskosten einen Vermögensgegenstand (z. B. einen Mastschweinestall) zu erstellen. Die Investitionskosten lassen sich als Basispreis interpretieren. Der Zeitraum bis zu dessen Ende eine Investitionsentscheidung hinausgezögert werden kann, lässt sich als Laufzeit der Option interpretieren. Da i. d. R. Investitionsentscheidungen zu einem beliebigen Zeitpunkt während eines bestimmten Zeitraumes getroffen werden können, sind sie mit amerikanischen Optionen vergleichbar. Bei realen Optionen ist der Investitionsrückfluss stochastisch. Die mit dem Besitz einer Option verbundene Flexibilität führt dazu, dass die Einzahlungen in einem positiven Umfeld unbegrenzt positiv sein können, bei negativen Rahmenbedingungen jedoch auf ein Minimum beschränkt sind. Die Struktur der Zahlungsströme unternehmerischer Handlungsfreiheiten ähnelt also Finanzoptionen. Reale Optionen können deshalb (mit gewissen Einschränkungen) wie Finanzoptionen bewertet werden.

Die Mathematik zur Bewertung von Finanzoptionen wurde in den 70er Jahren von BLACK UND SHOLES (1973) entwickelt. Erstmals auf reale Investitionsentscheidungen angewendet wurde diese Theorie von MCDONALD UND SIEGEL(1984). Seitdem wurde und wird die Anwendung durch diverse Autoren zur neuen Investitionstheorie weiterentwickelt und verfeinert. Der traditionellen Theorie folgend sollte eine Investition bereits durchgeführt werden, sobald der Barwert der Investitionsrückflüsse mindestens den Investitionskosten entspricht. Aus der Theorie der Finanzoptionen ist nun aber bekannt, dass bei diesem Vergleich lediglich ein Teil des Optionswertes, nämlich der innere Wert (Maximum aus Null und dem Kapitalwert) berücksichtigt wird. Darüber hinaus besitzt eine Option aber auch noch einen Fortführungswert, der dem diskontierten Erwartungswert der Option entspricht, wenn sie nicht unverzüglich in t ausgeübt, sondern die Entscheidung bis $t+dt$ hinausgezögert werden würde. Das bedeutet, dass eine Option optimalerweise erst dann ausgeübt werden sollte, wenn der innere Wert mindestens dem Fortführungswert entspricht. Dieses Entscheidungsproblem kann als ein spezielles Stoppproblem verstanden werden.

Die Stopp- und die Fortführungsregion ist unter bestimmten Regularitätsbedingungen eindeutig durch einen optimalen Ausübungspfad – auch Exercise Frontier genannt - von einander getrennt. Dieser besteht aus der Menge der kritischen Werte für das Basisobjekt, $V_t^*, t \in 0, \dots, n$, zu denen der Entscheider hinsichtlich der vorzeitigen Ausübung und des Haltens der Option indifferent ist - also der Fortführungswert dem inneren Wert der Option entspricht (Value-Matching-Bedingung). Eine amerikanische Call Option sollte im Sinne einer Gewinnmaximierung dann sofort ausgeübt werden, wenn $V_t \geq V_t^*$.

Prinzipiell bedarf die Lösung dieses Stoppproblems der Lösung einer partiellen Differentialgleichung. Eine analytische Lösung existiert aber lediglich für einfache Bewertungsprobleme. Einen Ausweg bietet der Rückgriff auf numerisch-approximative Lösungsverfahren. Der Schwerpunkt dieses Beitrages liegt auf der Anwendung der stochastischen Simulation, da in

diesem Bereich in jüngster Zeit vielversprechende Weiterentwicklungen zu verzeichnen sind. Insbesondere geeignet erscheinen Genetische Algorithmen (GA). Sie gewähren einen hohen Grad an Flexibilität und sind relativ einfach problemspezifisch anzuwenden.

3 Implementierung des Genetischen Algorithmus

GA's stellen ein stochastisch-numerisches Suchverfahren dar, dass sich an Prinzipien der natürlichen Evolution orientiert (vgl. HOLLAND, 1975). Ihre Funktionsweise wird im folgenden dargestellt. In jeder Periode werden – abgesehen von der Initialisierung - die im folgenden aufgelisteten Operatoren des GA's auf die bei der Bestimmung des Optionswertes zugrunde gelegte Population von Lösungen (Genotypen, kritische Ausübungspreise) angewandt. Die Implementierung erfolgt in MS-Excel.

(i) Initialisierung

Bevor die Simulation starten kann und die Operatoren des GA's auf die kritischen Ausübungspreise angewandt werden können, müssen diese in der ersten Periode initialisiert werden. Dies erfolgt in der Weise, dass jedem der N Genome (z. B. 50) mittels Zufallszahlengenerator ein bestimmter Ausgangswert (Genotyp) zugewiesen wird.

(ii) Ermittlung der Fitness der einzelnen Lösungen

Für die Selektion benötigt ein GA eine Bewertung der Leistungsfähigkeit der einzelnen Genotypen. Hierzu müssen sämtliche Genome auf die Problemstellung angewandt werden. Konkret bedeutet dies, dass die Wertentwicklung der Investitionsrückflüsse über den potentiellen Durchführungszeitraum wiederholt simuliert und unter Berücksichtigung der kritischen Ausübungspreise für jedes Genom jeweils der Rückfluss berechnet wird. Der durchschnittliche Profit über alle Simulationen gibt Aufschluss über die 'Güte' des zugrunde gelegten Genotyps.

(iii) Selektion und Replikation

Die Fitness einer bestimmten Lösung beeinflusst deren Überleben in der folgenden Generation. Es existieren unterschiedliche Selektionsmechanismen für GA. Die Standardvariante der Selektion besteht darin, dass sich der Anteil eines bestimmten Genotyps in der Folgegeneration unmittelbar oder mittels eines stochastischen Auswahlprozesses aus der relativen Fitness in der jeweiligen Iteration ergibt. Alternativ kann der Ersetzungsprozess auch lediglich auf ausgewählte Individuen, die keine genügende Fitness besitzen oder die zufällig 'sterben', angewandt werden. In beiden Fällen werden freie Plätze durch die Replikation hinreichend lebensfähiger Individuen der Vorperiode besetzt.

(iv) Rekombination

Die Rekombination erfolgt im Anschluss an die Selektion. Sie stellt den wesentlichen Operator eines GA's bei der Generierung neuer Lösungen dar. Dabei wird jede Lösung mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (z. B. 10 %) mit einer zufällig ausgewählten anderen Lösung gepaart. Dabei ergeben sich zwei Nachkommen, die den Platz der Eltern einnehmen.

(v) Mutationen

Für GA weniger bedeutend als die Rekombination sind Mutationen. Dennoch spielen auch sie eine nicht unwesentliche Rolle bei der Suche nach neuen erfolgreichen Lösungen. Darüber hinaus kommt ihnen eine Art Versicherungsfunktion zu. Sie erlauben, ansonsten verlorenes Genmaterial wiederzuerlangen und verhindern eine frühe Fixierung auf bestimmte Werte.

Mutationen werden so implementiert, dass in jeder neuen Generation einzelne Genotypen mit einer gewissen, zumeist geringen Wahrscheinlichkeit (z. B. 0.1 %) verändert werden.

Nachdem sämtliche dieser Schritte mehrfach durchlaufen sind, wird permanent die Stabilität der erhaltenen Lösungen geprüft. Sind die Genotypen einer Population dann einander sehr ähnlich und stabil, wird der GA beendet. Andernfalls werden die Schritte (ii)-(v) solange wiederholt, bis das Abbruchkriterium erfüllt ist.

4 Ausgewählte Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird das zuvor beschriebene numerische Optionsbewertungsverfahren auf Investitionsentscheidungen in der Schweinemast angewendet. Dabei werden folgende Annahmen getroffen:

- die Investition kann prinzipiell unendlich lange aufgeschoben werden
- Investition ohne Reinvestition vs. Investition mit Reinvestition (identischer Ersatz)
- Nutzungsdauer der Anlage folgt einem Poisson-Prozess (geometrische Abschreibung)
- Wahrscheinlichkeit der Reinvestition entsprechend geometrischer Abschreibung
- Unsicherheit in den Investitionsrückflüssen in der Schweinemast (Veredlungsmarge in der Schweinemast folgt einer geometrisch Brown'schen Bewegung)
- die Fitness der Lösungen einer Population wird als durchschnittlicher Gewinn nach 250 Simulationen bestimmt.

Tabelle 1 beschreibt die Ergebnisse der numerischen Optionsbewertung. Demzufolge übertreffen die kritischen Preise sowohl für einmalige Investitionen als auch für Investitionen mit der Möglichkeit der Reinvestition die klassische Investitionsschwelle signifikant. Die zusätzlich dargestellten analytischen Lösungen liefern eine Benchmark, die grundsätzlich die numerischen Lösungen unterstützen. Dabei besteht allerdings eine gewisse Divergenz, denn die analytischen Lösungen implizieren ein permanentes Ausübungsrecht, während bei den numerischen Lösungen nur eine Investitionsmöglichkeit je Jahr unterstellt wird. Mehrere Ausübungsmöglichkeiten je Jahr würden diese reduzieren. Die Modellrechnungen verdeutlichen somit das Potential des Simulationsansatzes in Verbindung mit GA für die Optionsbewertung.

Tabelle 1: Kritische Ausübungspreise für unterschiedliche Entscheidungssituationen

Entscheidungssituation		Standardabweichung	Diskontierungsrate	Abschreibungsrate	Kritische Ausübungspreise (in DM/kg Schlachtgewicht)	
					analytisch	numerisch
„Jetzt oder Nie“		-	4 %	5.26 %	2.55	2.55
Aufschubmöglichkeit	einmalige Investition	0.2	4 %	5.26 %	2.92	2.83
		0.3	4 %	5.26 %	3.21	3.05
	mit Reinvestition	0.2	4 %	5.26 %	2.77	2.71
		0.3	4 %	5.26 %	2.91	2.80

Weiterhin wird deutlich, dass die Modellspezifikation das Ergebnis in erheblichem Maße beeinflusst. Beispielsweise ist einem Landwirt, der die Möglichkeit der Reinvestition hat, bereits bei einem viel geringeren Schweinepreis eine Investition in die Schweinemast anzuraten, als einem Investor, dem dieses zusätzliche Recht nicht offen steht. Eine realitätsgetreue Modellspezifikation erscheint wesentlicher als die einfache Lösbarkeit des Bewertungsproblems.

5 Literatur

- BLACK, F. UND SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, S.637-659.
- DIXIT, A. UND PINDYCK, R. (1994): *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton.
- HOLLAND, J.H. (1975): *Adaption in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor.
- PIETOLA, K. S. UND WANG, H. H. (2000): The Value of Price- and Quantity-Fixing Contracts for Piglets in Finland. *European Review of Agricultural Economics* 27/4, 431-447.
- MCDONALD, R. UND SIEGEL, D. (1984): Option Pricing when the Underlying Asset Earns a Below-Equilibrium Rate of Return: A Note. In: *Journal of Finance*, S.331-349.