Eigenschaften zusammengesetzter Zufallsvariabler – analytische Ableitungen und Monte-Carlo-Simulationen

LUDGER HINNERS-TOBRÄGEL, Halle

Abstract

Products of random variables are often used for modeling uncertain relations. In this paper the first two moments and the distribution function of these functions of random variables are derived. For some cases where an analytical solution cannot be achieved Monte-Carlo simulations are performed.

1 Einführung

In stochastischen Modellen wird oft mit zusammengesetzten Zufallsveränderlichen gearbeitet. Addition, Multiplikation und Quadrierung sind dabei die wichtigsten Verknüpfungen. Zufallsvariablen müssen beispielsweise addiert werden, wenn der Gewinn eines Unternehmens aus mehreren unsicheren Produktionsverfahren resultiert. Ein Beispiel für die Multiplikation zweier Zufallsveränderlicher ist der Erlös eines Unternehmens, der als Produkt von unsicheren Preisen und Mengen aufgefasst wird. Quadrate von Zufallsvariablen gehen u.a. in die Berechnung der Streuung von Zufallsveränderlichen ein.

In diesem Papier stehen Produkte von Zufallsvariablen im Zentrum. Zunächst werden hierfür kurz die Momente Erwartungswert und Varianz umrissen. Deren Kenntnis reicht für viele Fragestellungen nicht aus, z. B. der Überlebenswahrscheinlichkeit von Unternehmen oder der Wahrscheinlichkeit, ob die Variable bestimmte kritische Werte über- oder unterschreitet. Daher erfolgt anschließend die Ableitung der Verteilungsgesetze. Wo dies analytisch nicht möglich ist, stelle ich Ergebnisse von Monte-Carlo-Simulationen vor.[1]

2 Stochastische Eigenschaften von Produkten von Zufallsveränderlichen

Produkte von Zufallsveränderlichen erfordern einen höheren mathematischen Aufwand als Summen. Dies gilt besonders, wenn stochastische Unabhängigkeit der Variablen nicht vorausgesetzt werden kann, wie z. B. oft bei Preisen und Mengen. Übersicht 1 gibt einen Überblick zu den wichtigsten Kennzahlen von Summen und Produkten von Zufallsvariablen.

Ist Unabhängigkeit gegeben, entspricht der Erwartungswert des Produktes dem Produkt der jeweiligen Erwartungswerte. Bei der Multiplikation zweier stochastisch *abhängiger* Zufallsvariabler, ist zu dem Produkt der Erwartungswerte die gemeinsame Kovarianz zu addieren:

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) + \mathrm{cov}(X,Y) \quad . \tag{1}$$

Für den Erwartungswert des Produktes aus mehr als zwei stochastisch abhängigen Zufallsvariablen, finden sich in den in Übersicht 1 genannten Quellen keine Angaben. Allerdings kann durch entsprechende Substitution jedes Produkt als ein Produkt aus zwei Faktoren dargestellt werden, auf welches anschließend (1) mehrfach angewendet werden kann.

Für die Varianz eines Produktes gilt, wenn Unabhängigkeit vorausgesetzt werden kann:

$$\mathrm{Var}(X \cdot Y) = (\mathrm{E}X)^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}Y)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \cdot \mathrm{Var}(X) \quad .\text{[2]} \tag{2}$$

[1] Ausführlicher dazu HINNERS-TOBRÄGEL (2000) Abschnitt 4.4.

[2] ROHATGI (1984, S. 268f, 273) gibt hierfür eine Näherung an: $\mathrm{Var}(X \cdot Y) = (\mathrm{E}X)^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}Y)^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$, die sich von der exakten Formel nur durch Fehlen des letzten Summanden unterscheidet. Da die für die Bildung dieses Terms benötigten Informationen auch in andere Teile der Gleichung einfließen, ist die Näherung kaum einfacher zu berechnen. Auch ist der Näherungsfehler, wie Proberechnungen zeigen, nicht unbeträchtlich.

Übersicht 1: Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianzen zusammengesetzter Zufallsveränderlicher

$Z=$	$\mathrm{E}(Z)=$	$\mathrm{Var}(Z)$	Quellen
$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$	$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}(X_i)$	$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) +$ $2 \sum_{i<j} \sum a_i a_j \mathrm{cov}(X_i; X_j)$	BAMBERG & BAUR (1987) S. 120ff, KENDALL & STUART (1977) S. 53, RASCH (1976) S. 170, ROHATGI (1984) S. 258
$X \cdot Y$	$\approx \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) + \mathrm{cov}(X,Y)$	$\approx (\mathrm{E}X)^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}Y)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) \cdot \mathrm{cov}(X,Y)$	RINNE (1997) S. 272
		bei Unabhängigkeit: $(\mathrm{E}X)^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}Y)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \cdot \mathrm{Var}(X)$	BENJAMIN & CORNELL (1970) S. 170
$\prod_{i=1}^{n} a_i X$	bei Unabhängigkeit: $\prod_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}(X_i)$	keine Angaben bei den genannten Arbeiten	JUDGE et al. (1988), S. 39

Normalverteilung:	Anteil der Werte in $[-\sigma + \mu, \mu + \sigma] = 0.68$
Nicht-Normalverteilung:	Anteil der Werte in $[-\sigma + \mu, \mu + \sigma]$ im allgemeinen $\neq 0.68$

Über die Varianz von mehr als zwei Faktoren oder zwei stochastisch abhängigen Zufallsvariablen finden sich in der durchgesehenen Literatur ebenfalls keine Angaben. Daher beschränken sich die folgenden Ausführungen zu den **Verteilungsgesetzen** auf Produkte aus zwei Faktoren.

Ein solches Produkt ist in der Regel anders verteilt als die Ausgangsfaktoren, auch wenn diese identisch und unabhängig verteilt sind.[3] Wenn die Zufallsveränderlichen nur positive Werte annehmen können, läßt es sich durch die sog. *„Melin convolution“* (SPRINGER 1979, S. 91, 97) angeben. Es sei:

$$Z \equiv X \cdot Y \ .$$

Dann gilt für die Dichtefunktion von Z:

$$\mathrm{h}_2(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x} \cdot \mathrm{f}_X(x) \cdot \mathrm{f}_Y\!\left(\frac{z}{x}\right) \cdot \mathrm{d}\,x, \quad x, y \geq 0 \ . \tag{3}$$

Das Subscript 2 kennzeichnet die Anzahl der Faktoren in Z. Für n nichtnegative Faktoren $X_{1,\ldots,}X_n$ gilt entsprechend die rekursive Beziehung (SPRINGER 1979, S. 97):

$$\mathrm{h}_n(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x_n} \cdot \mathrm{h}_{n-1}\!\left(\frac{z}{x_n}\right) \cdot \mathrm{f}_{X_n}(x_n) \cdot \mathrm{d}\,x_n \ .$$

[3] Dies wird in der Literatur gelegentlich übersehen, beispielsweise wenn für einen Erlös, der als Produkt der beiden normalverteilten Zufallsvariablen Preis und Ertrag eingeführt wird, eine Normalverteilung unterstellt wird (NOELL 1996).

Wird beispielsweise in Formel (3), die, wie erwähnt, nur für nichtnegative Zufallsvariablen gilt, die Dichte der Normalverteilung eingesetzt, ergibt sich für das Produkt zweier identischer und unabhängiger Normalverteilungen $Z = N_X(\mu,\sigma^2) \cdot N_Y(\mu,\sigma^2)$ unter der Bedingung $x, y, z \geq 0$

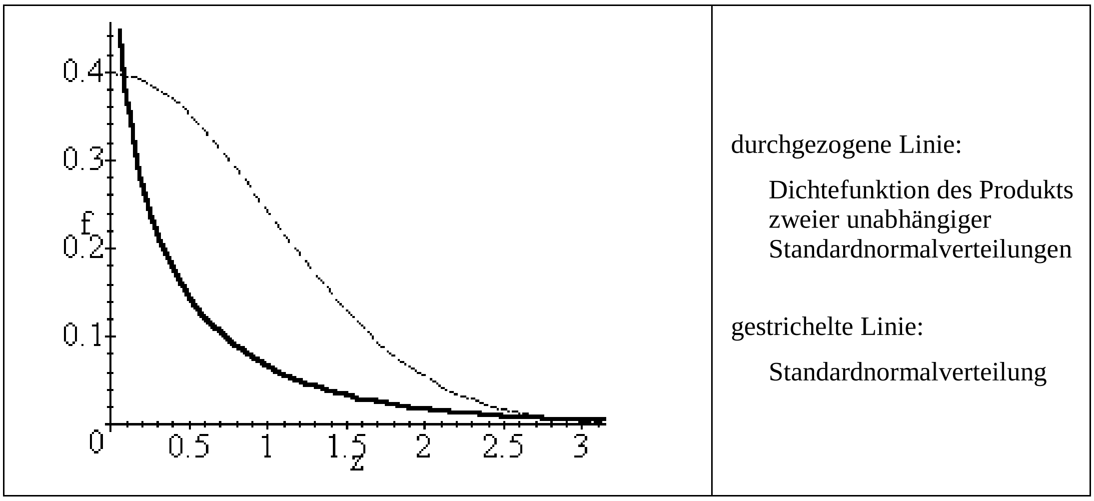
$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{z^2 - 2\,z\,\mu\,y + 2\,\mu^2\,y^2 + y^4 - 2\,y^3\,\mu}{y^2\,\sigma^2}\right)}}{y\,\sigma^2\,\pi}\, dy \quad .$$

Für Standardnormalverteilungen vereinfacht sich die Formel zu:

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{z^2}{y^2}\right)}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\,y^2\right)}}{y\,\pi}\, dy \quad .$$

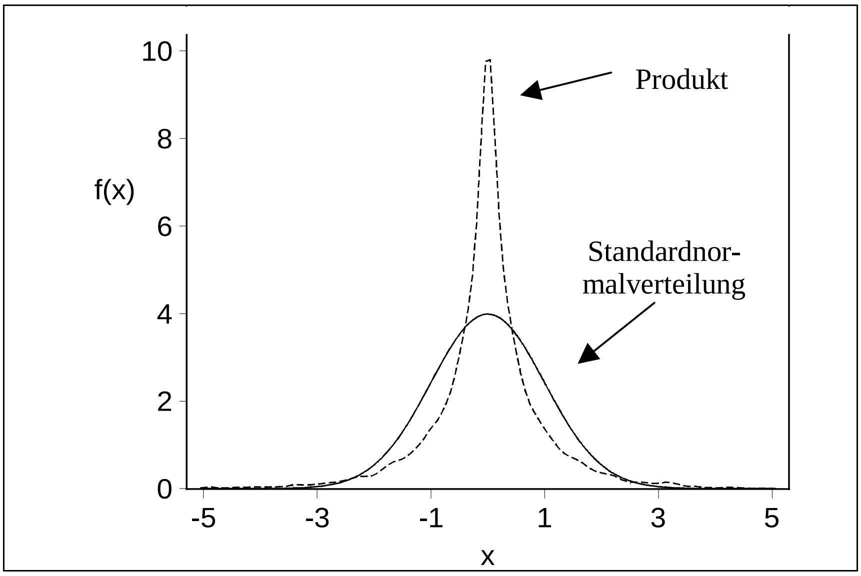
In Schaubild 1 ist ein solches Produkt zweier unabhängiger Standardnormalverteilungen $Z = N_X(0,1) \cdot N_Y(0,1)$ für $x, y, z \geq 0$ im Vergleich zu einer einfachen Standardnormalverteilung abgetragen. Die Momente des Produktes stimmen mit den Momenten der Ausgangsverteilung überein, da stochastische Unabhängigkeit vorliegt (vgl. Übersicht 1); dennoch verändert sich die Verteilungsform sehr deutlich. Die Verteilung des Produktes erscheint zum Ursprung hin eingedrückt. Sie konvergiert für $z \rightarrow 0$ gegen $+\infty$.

Schaubild 1: Dichtefunktion des Produkts zweier unabhängiger Standardnormalverteilungen im ersten Quadranten



Da (3) nur für positive Argumente gilt, wird ein Monte-Carlo-Simulationsexperiment durchgeführt. Schaubild 2 zeigt die Dichtefunktion des Produktes zweier Standardnormalverteilungen (durchgezogene Linie). Der Graph ähnelt stark einer Laplace-Verteilung; zum Vergleich ist die Standardnormalverteilung eingezeichnet (gestrichelte Linie).

Schaubild 2: Dichtefunktion des Produktes zweier Standardnormalverteilungen im Monte-Carlo-Simulationsexperiment



Diese einfache Simulation (10 000 Wiederholungen) zeigt, dass beispielsweise Erlöse, die als Produkt von normalverteilten Erträgen und normalverteilten Preisen modelliert werden, keinesfalls mehr normalverteilt sind. Dies ist für die Risikoanalyse von großer Bedeutung.

3 Zusammenfassung

Produkte von Zufallsveränderlichen sind in der Modellierung von unsicheren Zusammenhängen häufig anzutreffen. Die Ableitung der Verteilungsgesetze erweist sich als schwierig, da die Produkte in der Regel eine andere Verteilungsform aufweisen als die Faktoren (keine Reproduktionseigenschaft). Wie Monte-Carlo-Simulationsexperimente zeigen, ist beispielsweise die Anpassungsgüte einer Normalverteilung für ein Produkt aus zwei Normalverteilungen sehr schlecht.

4 Literatur

BAMBERG, GÜNTER & FRANZ BAUR (1987): *Statistik.* 5. Aufl., München, Wien: Oldenbourg.

BENJAMIN, JAXK R. & C. ALLIN CORNELL (1970): *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers.* New York: McGraw-Hill.

HINNERS-TOBRÄGEL, LUDGER (2000): *Zur Analyse der Überlebensfähigkeit von Unternehmen – Methodisch-theoretische Grundlagen und Simulationsergebnisse*. Göttingen: Cuvillier.

JUDGE, G.G., W.E. GRIFFITHS, R.C. HILL, H. LÜTKEPOHL & T.-C. LEE (1988): *Introduction to the theory and practise of econometrics.* 2. Aufl., New York: Wiley.

KENDALL, MAURICE GEORGE & ALAN STUART (1977): *The advanced theory of statistics,* Band 1, 4. Aufl., London: Charles Griffin & company limited.

NOELL, CHRISTIAN (1996): Mehr Sicherheit oder Gewinn. *DLG-Mitteilungen*, Heft 12, S. 30-32.

RASCH, DIETER (1976): *Einführung in die mathematische Statistik.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

RINNE, HORST (1997): *Taschenbuch der Statistik.* 2. Aufl., Thun: Deutsch.

ROHATGI, VIJAY K. (1984): *Statistical* Inference. New York: Wiley.

SPRINGER, M.D**.** (1979): *The Algebra of Random Variables.* New York: Wiley.