

Messung von Marktrisiken in der Tierproduktion mittels Extreme Value Theory

JAN HINRICHS, BERLIN
MARTIN ODENING, BERLIN

Abstract

The Value-at-Risk (VaR) concept is used to quantify market risk in livestock production during the recent BSE crisis in Germany.

The estimation of VaR is carried out by means of Extreme Value Theory (EVT), applied to estimate extreme quantiles of the return distribution. The results are compared with traditional VaR-models. Furthermore, horizontal problems of VaR-estimation are examined.

1 Einführung und Problemstellung

Im letzten Quartal 2000 sind deutsche Schweine- und Rindermäster extremen Preisschwankungen auf Grund der BSE-Krise ausgesetzt gewesen. Viele Landwirte gerieten in Liquiditätsprobleme, und die EU war gezwungen, Märkte durch massive Interventionen zu stabilisieren. Diese Ereignisse sowie die Erwartung zunehmender Preisvolatilitäten auf künftig liberalisierten Agrarmärkten zeigen einen gestiegenen Bedarf an Risikoindikatoren für landwirtschaftliche Betriebe auf. Value-at-Risk (VaR) ist ein in diesem Zusammenhang diskutiertes Konzept. VaR hat sich in Finanzinstituten etabliert, um das Downside Risk von Marktportfolios darzustellen. Es misst den maximalen Verlust eines Portfolios, der innerhalb eines definierten Zeitraums mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit in Folge von Marktpreisschwankungen erfolgen kann (JORION 1997). Obwohl VaR ursprünglich für Finanzinstitute entwickelt wurde, liegen bereits erste Anwendungen im Agrarbereich vor (ODENING & MUSSHOF 2002). Bei der Übertragung treten allerdings einige Probleme auf. Zum einen ist der notwendige Prognosezeitraum in landwirtschaftlichen Anwendungen wesentlich länger als im Finanzsektor, und somit stellt sich die Frage der Extrapolation einer kurzfristigen VaR-Prognose. Die hier häufig verwendete Square-Root-Regel setzt jedoch unabhängige und normalverteilte Renditen eines Portfolios voraus. Zum anderen bestehen bei konventionellen VaR-Modellen Probleme bei der Schätzung des linken Rands der Gewinn- und Verlustverteilung, insbesondere wenn lange historische Preiszeitreihen nicht vorhanden sind. Wie im Fall der BSE-Krise ist aber gerade eine Vorhersage extremer Ereignisse von speziellem Interesse. DIEBOLD et al. (1998) empfehlen in diesem Zusammenhang die Extreme Value Theory (EVT) zur Verbesserung der Schätzung extremer Quantile.

Das Anwendungspotenzial dieser Methodik wird am Beispiel der Schweineproduktion untersucht. Potenzielle Probleme herkömmlicher VaR-Modelle werden aufgezeigt und Vorschläge zur Lösung analysiert. Wir wenden die EVT auf das Beispiel an und vergleichen die Ergebnisse mit den herkömmlichen Methoden (Historische Simulation und Varianz-Kovarianz-Methode).

2 Value-at-Risk: Konzept und Berechnungsmethoden

Kurz gefasst drückt VaR den maximalen Vermögensverlust aus, den ein Unternehmen innerhalb eines definierten Zeitraumes mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit in Folge von Marktpreisschwankungen erleiden kann. Die Berechnung von VaR entspricht dem Auffinden eines speziellen Quantils der Verteilung der Wertänderung, d.h. der Gewinne bzw. Verluste. Man spricht auch von der profit and loss distribution.

Es liegen verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung des VaR vor, ausführlichere Beschreibungen finden sich bei JORION (1997) oder DOWD (1998). Die Varianz-Kovarianz-Methode

(VKM) bestimmt VaR unter der Annahme von Normalverteilung direkt als Funktion der Standardabweichung der profit and loss distribution, führt jedoch zur Unterschätzung des VaR wenn keine Normalverteilung vorliegt. Im Gegensatz hierzu ist für die Historische Simulation (HS) keine explizite Verteilungsannahme notwendig, da die Wertänderungen direkt aus Vergangenheitsdaten abgelesen werden. Über Ereignisse, die schlechter sind als das Stichprobenminimum, kann jedoch per definitionem nichts ausgesagt werden.

3 Das Konzept der Extreme-Value-Theory

Einen Ansatz zur Verbesserung der Schätzgüte extremer Quantile bietet die Extreme-Value-Theorie (EVT)¹. Sie liefert spezielle statistische Grundlagen für die Schätzung der Ränder von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Es wird, auf der ausschließlichen Datengrundlage extremer Beobachtungswerte, eine Verteilungsfunktion geschätzt, die nur für die Ränder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt.

Unter der Annahme, dass die Stichprobenmaxima einer Verteilung F , die "Fat Tails" aufweist, gegen eine Frechet-Verteilung $\Phi(x) = \exp(-x^\alpha)$ konvergiert, gilt folgende Bedingung:

$$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x) \quad (1)$$

(1) entspricht der Forderung, dass der Rand der Verteilung F gemäß einer Potenzfunktion ausläuft (DIEBOLD et al. 1998). Darin ist $L(x)$ eine langsam variierende Funktion, die häufig als Konstante gewählt wird, und α ist der Tail-Index der Verteilung. Je kleiner α ist, umso größeres Gewicht haben die Ränder der Verteilung F . Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantile für den äußersten Rand einer nicht notwendigerweise bekannten Verteilung F mit "Fat Tails" lassen sich bestimmen, indem der Tail-Index α auf geeignete Weise geschätzt wird. Ein verbreitetes Verfahren ist der Hill-Estimator (DIEBOLD et al. 1998). Dazu sind die beobachteten Verluste X der Größe nach zu ordnen: $X_1 > X_2 > \dots > X_k > \dots > X_n$. Der Tail-Index α kann dann wie folgt geschätzt werden:

$$\hat{\alpha}(k) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_i - \ln X_{k+1} \right)^{-1} \quad (2)$$

Das Ergebnis der Schätzung wird stark durch die Wahl des Grenzwertes X_k bzw. die Anzahl der Stichprobenwerte k beeinflusst. Um dieses Problem zu lösen, entwickeln DANIELSSON et al. (2001) ein Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils k/n .

4 Extrapolation kurzfristiger VaR-Prognosen

Aus der Sicht landwirtschaftlicher Unternehmen besteht Bedarf, VaR-Prognosen zu erstellen, deren Horizont größer ist als das Messintervall der zugrunde liegenden Daten, etwa auf der Basis wöchentlicher Daten das VaR für drei oder sechs Monate zu bestimmen. Es existieren grundsätzlich zwei Möglichkeiten, VaR-Prognosen für eine längere „Holding-Period“ zu erstellen: Entweder man misst die Wertveränderungen über den Zeitraum, den es zu prognostizieren gilt, d.h. man schätzt das VaR auf der Basis drei- oder sechsmonatiger Renditen, oder man rechnet eine kürzerfristige (z.B. wöchentliche) VaR-Schätzung auf den gewünschten Zeitraum hoch. Das erstgenannte Vorgehen ist unabhängig von der Renditeverteilung möglich; es weist allerdings den gravierenden Nachteil auf, dass sich die Zahl der Beobachtungen stark reduziert. Stehen beispielsweise wöchentliche Daten über einen Zeitraum von 10 Jahren zur Verfügung und soll ein Halbjahres-VaR berechnet werden, so kann sich die Schätzung nur auf 20 Beobachtungen stützen. Für die zweite Vorgehensweise, die Hochrechnung von VaR-

¹ EMBRECHTS et al. (1997, S. 364) beschreiben das Anliegen der EVT plakativ als „Mission Impossible: How to Predict the Unpredictable“.

Schätzungen (Time-Scaling, Time-Aggregation), wird häufig die Square-Root-Regel herangezogen²:

$$\text{VaR}(h) = \text{VaR}(1) \cdot \sqrt{h} \quad (3)$$

Darin ist $\text{VaR}(1)$ das Ein-Perioden-VaR und $\text{VaR}(h)$ entsprechend das h -Perioden-VaR. DIEBOLD et al. (1997) zeigen, dass eine fehlerfreie Umrechnung mittels (3) an verschiedene Bedingungen geknüpft ist. Erstens, darf sich die Struktur des betrachteten Portfolios im Zeitablauf natürlich nicht ändern. Zweitens, müssen die Renditen identisch und unabhängig verteilt sein (iid Annahme), und drittens, müssen sie normalverteilt sein. Von der Strukturkonstanz des Portfolios soll im Weiteren ausgegangen werden. Falls die iid-Annahme erfüllt ist, jedoch keine Normalverteilung, sondern eine Fat-Tail-Distribution vorliegt, erfolgt die Hochrechnung unter Verwendung des Tail-Index α :

$$\text{VaR}(h) = \text{VaR}(1) \cdot h^{1/\alpha} \quad (4)$$

Weist die profit and loss distribution endliche Varianzen auf, impliziert dies $\alpha > 2$ und somit einen kleineren Skalierungsfaktor als von der Square-Root-Regel.

5 Empirische Ergebnisse

Das Marktrisiko in der Schweineproduktion wird mit Hilfe von VaR Prognosen auf der Grundlage von Preiszeitreihen der Zentralen Markt- und Preisberichtsstelle Berlin (ZMP) quantifiziert. Das VaR wird für drei Zeitreihen ausgewiesen: Für die Erzeugerpreise von Ferkeln (Sichtweise des Ferkelerzeugers), für die Erzeugerpreise für Schlachtschweine (Sichtweise des Verbundbetriebes) und die Differenz aus Erlösen und Ferkelpreisen, der sogenannten Veredlungsmarge, (Sichtweise des spezialisierten Mastbetriebes), wobei ein Schlachtgewicht von 80 kg angenommen wird. Ferkel und Schweine werden nicht über Vertragsproduktion zu vorab definierten Preisen, sondern zu aktuellen Marktpreisen gekauft bzw. verkauft. Andere Aufwandspositionen, wie z.B. Futterkosten, beeinflussen zwar das Niveau der Veredlungsmarge, unterliegen in Deutschland aber nur geringen Schwankungen. Für die Berechnung des VaR spielen sie daher praktisch keine Rolle und werden hier nicht mit berücksichtigt. Es ist hervorzuheben, dass es sich hier nicht um eine Anwendung des VaR-Konzeptes im engeren Sinne handelt, sondern vielmehr ein Cash-Flow-at-Risk (CFaR) berechnet wird (DOWD 1998, S. 239 f.). Trotz der formalen Analogie ist auf Unterschiede in der Interpretation beider Größen hinzuweisen: Während VaR den Wertverlust einer Vermögensposition quantifiziert, bezieht sich CFaR auf eine Stromgröße, eben den Cash Flow. Der informativische Wert des CFaR ist daher vor allem für eine risikoorientierte mittelfristige Finanzplanung gegeben.

Die Ergebnisse des Kolmogorov-Smirnoff und des Jarque-Bera Tests auf Normalverteilung zeigen, dass die betrachteten Preisänderungen nicht normalverteilt sind und ihre Verteilung "Fat Tails" beinhaltet. Die Voraussetzungen für die Anwendung der EVT zur Berechnung des VaRs sind somit gegeben. Zur Bestimmung des 12-Wochen-VaRs werden die nach den drei oben genannten Methoden ermittelten VaRs hochgerechnet. Für die mittels HS und VKM berechneten VaRs geschieht dies mit der Square-Root-Regel. Die mit der EVT errechneten VaRs werden dagegen mit der Alpha-Root-Regel, d.h. unter Verwendung des jeweiligen Tail-Indexes α , hochgerechnet. Tab. 1 enthält die so ermittelten VaRs für verschiedene Konfidenzniveaus. Das durchschnittliche Preisniveau der Ferkelpreise (Schweinepreise und Marge) beträgt 1,938 Euro (1,399 und 73,192). Das beispielsweise nach der EVT berechnete VaR in der Höhe von 0,24 Euro bedeutet, dass der Schweinepreis innerhalb von 12 Wochen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % um nicht mehr als 0,24 Euro sinkt.

² Die Square-Root-Regel findet beispielsweise auch in dem verbreiteten RiskMetrics-Modell der JP Mogan Investmentbank Anwendung.

Tabelle 1: 1- und 12-Wochen-VaRs für die drei Zeitreihen und verschiedene Konfidenzniveaus

Konfidenzniveau	Ferkelpreis in Euro			Schweinepreis in Euro			Marge in Euro		
	95,00%	99,00%	99,90%	95,00%	99,00%	99,90%	95,00%	99,00%	99,90%
EVT									
1 Woche	0,130	0,176	0,270	0,088	0,131	0,230	6,786	8,476	11,653
12 Wochen	0,207	0,280	0,429	0,162	0,240	0,422	9,567	11,950	16,429
HS									
1 Woche	0,104	0,182	-	0,077	0,128	-	5,358	8,303	-
12 Wochen	0,361	0,631	-	0,266	0,443	-	18,562	28,764	-
VKM									
1 Woche	0,105	0,148	0,197	0,081	0,115	0,153	5,607	7,947	10,571
12 Wochen	0,362	0,514	0,684	0,282	0,400	0,532	19,422	27,531	36,620

Für das 99,9% Niveau können die Quantile mit HS nicht bestimmt werden, da sie außerhalb der in den Preiszeitreihen enthaltenen extremen Preisschwankungen liegen. Hier ist eine Stärke der EVT zu sehen, die auch Aussagen außerhalb beobachteter Schwankungen ermöglicht. Im Gegensatz zur tendenziellen Unterschätzung beim Ein-Wochen-VaR, ist mittelfristig eine Überschätzung der VaRs bei der HS und der VKM im Vergleich zur EVT zu beobachten. Die kurzfristige Unterschätzung des VaRs durch die HS und die VKM wird, abhängig von der Länge des Prognosehorizonts, durch eine zu konservative Hochrechnung mit der Square-Root-Regel überkompensiert.

Der Vorzüge einer EVT-gestützten VaR-Prognose liegen in der Prognose extremer Ereignisse mit einer hohen Schätzgenauigkeit. Um von einem hohen CFaR auf eine finanzielle Gefährdung eines Unternehmens schließen zu können, muss neben dem Ausgangsniveau die Dauer des niedrigen Cash Flow berücksichtigt werden. Ob eine Ausweisung extremer Quantile notwendig erscheint, hängt von der Anwendungssituation ab. Hier unterscheidet sich die Sichtweise eines Schweinemästers oder Ferkelproduzenten von der eines Traders, der mit Terminkontrakten auf Schweine handelt oder von der eines Versicherungsunternehmens, das Tierseuchen versichert. Wenn eine Ausweisung extremer Quantile (z.B. 99% oder höher) wünschenswert erscheint, dann sollten diese im Fall von Fat-Tail-Verteilungen ergänzend mit EVT geschätzt werden. Der zusätzliche Rechenaufwand wird durch die höhere Schätzgenauigkeit im äußeren Rand der Verteilung sowie durch markante Unterschiede bei der zeitlichen Aggregation der VaR-Prognosen gerechtfertigt.

Literatur

- DIEBOLD, F., X.; SCHUERMANN, T.; STROUGHAIR, J. (1998): Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management. Wharton Financial Institutions Center, Working Paper 98-10.
- DOWD, K. (1998): Beyond Value at Risk. Wiley, Chicester u.a.
- EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. (1997): Modeling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.
- JORION, P. (1997): Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, New York.
- MANFREDO, M., R.; LEUTHOLD, R., M. (1999): Market Risk Measurement and the Cattle Feeding Margin: An Application of Value-at-Risk. OFOR Paper Number 99-04.
- ODENING, M., MUBHOFF, O. (2002): Value at Risk - Ein nützliches Instrument des Risikomanagements in Agrarbetrieben? Tagungsband der 41. Jahrestagung der GeWiSoLa, Braunschweig, Buchbeitrag 316.
- DANIELSSON, J., DE VRIES, C. G. (2000): Value-at-Risk and Extreme Returns. Annals d'Economie et de Statistique 60: 239-269.